Taki Academy
www.takiacademy.com

# Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Suites Réelles

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Magazines

## Exercice 1 : 25 min 5 pts

On considère la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

**1°)** Calculer $U_1$ et $U_2$.

**2°) a)** Montrer que pour tout $n \in IN$ : $1 \leq U_n \leq \frac{3}{2}$.

**b)** Etudier la monotonie de $(U_n)$.

**c)** En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**3°) a)** Montrer que pour tout $n \in IN$ : $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

**b)** Déduire que pour tout $n \in IN$ : $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

**c)** Retrouver alors $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

## Exercice 2 : 30 min 6 pts

Soit la suite réelle $(u_n)$ définie sur IR par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$

**1°) a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

**b)** Montrer que pour tout $n \in$ IN, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

**c)** En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**2°)** Pour tout $n \in$ IN, on pose $v_n = \frac{1}{u_n^2}$.

**a)** Montrer que la suite $v$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

**b)** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ puis retrouver $u_n$ en fonction de $n$.

**3°)** On pose pour tout $n \in$ IN, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

**a)** Calculer $S_0$, $S_1$ et $S_2$.

**b)** Montrer que pour tout $k \in$ IN, $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$.

**c)** En déduire que pour tout $n \in$ IN, $S_n \geq 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right)$ puis calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

www.takiacademy.com

Taki Academy
www.takiacademy.com

## Exercice 3 : 20 min 4 pts

Soit la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & si \quad x\in]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

On donne ci-contre le tableau de variation de $f$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $1$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ $\sqrt{2}-1$ |

Soit $U$ la suite définie sur IN par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

**1°)** Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0<U_n\leq 1$

**2°) a)** Montrer que pour tout $n\in$ IN on a : $U_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}U_n$

**b)** En déduire que $U$ est décroissante et que $U_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Calculer la limite de la suite $U$.

## Exercice 4 : 15 min 4 pts

On represente ci-contre la courbe $(C_f)$ d'une fonction $f$ et la droite $D$: $y=x$.

**1°)** Utiliser le graphique ci-dessous pour justifier la proposition suivante :
$f(x)\geq x$ pour $x\in[1,7]$.

**2°)** Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n), \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

Donner $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$. Que peut-on dire da la suite $(u_n)$ ?

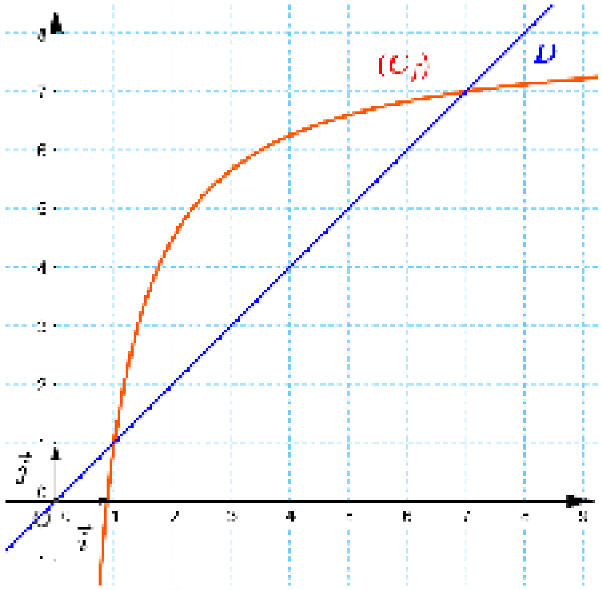
**3°)** Soit $(v_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n), \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

**a)** Placer sur l'axe des abscisses les points $v_1$, $v_2$ et $v_3$.

**b)** Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$ on a : $1\leq v_n\leq 7$.

**c)** Montrer que $(v_n)$ est croissante.

**d)** En déduire que $(v_n)$ est convergente et calculer sa limite.






www.takiacademy.com

Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Takiacademy | Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil · Mon profil · Offres · Matières · En direct · Porte monnaie · Assistance

Taki Academy
www.takiacademy.com

# Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Suites Réelles

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba
www.takiacademy.com 73.832.000
Magazines

**Exercice 1 :** 25 min 5 pts

On considère la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer $U_1$ et $U_2$.

★ $U_1 = (U_0 - 1)^2 + 1$

$= \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + 1$

$= \frac{1}{4} + 1$

Ainsi $\boxed{U_1 = \frac{5}{4}}$

★ $U_2 = (U_1 - 1)^2 + 1$

$= \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 + 1$

$= \frac{1}{16} + 1$

Ainsi $\boxed{U_2 = \frac{17}{16}}$



Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf · 62cbe1335301e_M....pdf · 6338df5499e79_Ex....pdf · 6338d98d78805_E....pdf · 6338d942b9c76_1....pdf · Tout afficher
20:19

Takiacademy | Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance



2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ : $1 \le U_n \le \frac{3}{2}$.

★ Pour $n = 0$ ; $1 \le U_0 = \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}$ (vraie)

★ Pour $n \in N$ ; Supposons que $1 \le U_n \le \frac{3}{2}$ et montrons que $1 \le U_{n+1} \le \frac{3}{2}$

On a : $1 \le U_n \le \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 0 \le U_n - 1 \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \le (U_n - 1)^2 \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 \le U_{n+1} \le \frac{5}{4} \le \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$

★ Donc $\forall n \in N$ ; $1 \le U_n \le \frac{3}{2}$

b) Etudier la monotonie de $(U_n)$.

★ $U_{n+1} - U_n = (U_n - 1)^2 + 1 - U_n$

$= U_n^2 - 2U_n + 1 + 1 - U_n$

$= U_n^2 - 3U_n + 2 \quad \forall n \in N$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x+2$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

or $1 \le U_n \le \frac{3}{2}$

Donc $U_{n+1} - U_n \le 0 \quad \forall n \in N$

**Ainsi $(U_n)$ est décroissante**

c) En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

★ $(U_n)$ est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

★ On pose $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$ avec $1 \le \ell \le \frac{3}{2}$

et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = (x-1)^2 + 1$ où $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en $\ell$.



www.takiacademy.com

Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf | 62cbe1335301e_M....pdf | 6338df5499e79_Ex....pdf | 6338d98d78805_E....pdf | 6338d942b9c76_1....pdf | Tout afficher
20:19

Takiacademy
Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Donc $f(\alpha) = \alpha$

$\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 1 = \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 1 = \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$ Car $1 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 1}$

**3°) a)** Montrer que pour tout $n \in IN$ : $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

* $U_{n+1} - 1 = (U_n - 1)^2 = (U_n - 1)(U_n - 1)$

or $U_n \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow U_n - 1 \leq \frac{1}{2}$ et $U_n - 1 \geq 0$

Donc $(U_n - 1)^2 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$



$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N} ; \quad 0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)}$

**b)** Déduire que pour tout $n \in IN$ : $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

* Pour $n = 0$ ; $U_0 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^{0+1}}$ (vraie)

* Pour $n \in \mathbb{N}$ ; Supposons que $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

et montrons que $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

On a $\times \frac{1}{2}$ ( $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(U_n - 1) \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

donc $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

* $\boxed{\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} ; \quad U_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}}$



Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf
62cbe1335301e_M....pdf
6338df5499e79_Ex....pdf
6338d98d78805_E....pdf
6338d942b9c76_1....pdf
Tout afficher
20:20

c) Retrouver alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$ .

- On a $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 \leq U_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Car $-1 \leq \frac{1}{2} \leq 1$

donc $\lim_{n\to+\infty} U_n - 1 = 0$

**Ainsi $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$**



## Exercice 2 : 30 min 6 pts

Soit la suite réelle $(u_n)$ définie sur IR par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{cases}$

**1°) a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$ .

- Pour $n = 0$ ; $0 \leq U_0 = 1 \leq 1$
- Pour $n \in \mathbb{N}$ ; Supposons que $0 \leq U_n \leq 1$

et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

- $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}} \geq 0$ ($U_n \geq 0$, $\sqrt{U_n^2+1} > 0$)

- $U_{n+1} - 1 = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}} - 1$

$= \frac{U_n - \sqrt{U_n^2+1}}{\sqrt{U_n^2+1}} \times \frac{U_n + \sqrt{U_n^2+1}}{U_n + \sqrt{U_n^2+1}}$

$= \frac{U_n^2 - \sqrt{U_n^2+1}}{\sqrt{U_n^2+1}\,(U_n + \sqrt{U_n^2+1})}$

Takiacademy
Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique



$$= \frac{-1^{<0}}{\sqrt{U_n^2+1}\left(U_n+\sqrt{U_n^2+1}\right)} \leq 0$$

Donc $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

**Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 \leq U_n \leq 1$**

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Pour $n = 0$ $U_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$ (vraie)

Pour $n \in \mathbb{N}$ ; Supposons que $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

et montrons que $U_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

On a : $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}}$$





$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{1}{n+1}+1\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

**Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$**

c) En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, donc **$(U_n)$ est Convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$**



Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance
1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf
62cbe1335301e_M....pdf
6338df5499e79_Ex....pdf
6338d98d78805_E....pdf
6338d942b9c76_1....pdf
Tout afficher
20:20

Takiacademy | Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Taki Academy

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n^2}$.

**a)** Montrer que la suite $v$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}^2} = \dfrac{1}{\frac{U_n^2}{U_n^2+1}} = \dfrac{U_n^2+1}{U_n^2}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n^2+1}{U_n^2} - \dfrac{1}{U_n^2} = \dfrac{U_n^2}{U_n^2} = 1$

Donc $V$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0^2} = 1$



Taki Academy

**b)** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ puis retrouver $u_n$ en fonction de $n$.

- $V_n = V_0 + nr = 1 + n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_n = \dfrac{1}{U_n^2}$

$\Leftrightarrow U_n^2 = \dfrac{1}{V_n}$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{1}{\sqrt{V_n}}$ car $U_n \geq 0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}$

3°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

**a)** Calculer $S_0$, $S_1$ et $S_2$.

- $S_0 = U_0 = 1$

- $S_1 = U_0 + U_1 = 1 + \dfrac{U_0}{\sqrt{U_0^2+1}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} =$

Ainsi $S_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$



Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf | 62cbe1335301e_M....pdf | 6338df5499e79_Ex....pdf | 6338d98d78805_E....pdf | 6338d942b9c76_1....pdf | Tout afficher
20:20

Takiacademy | Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Chercher cours, examens ou exercices... | Votre solde 0 pts | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

$$S_2 = U_0 + U_1 + U_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**b)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \le \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$.

$$\forall k \in \mathbb{N};\ \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} = \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) \times \frac{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{k+2}^2 - \sqrt{k+1}^2}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{k+2-k-1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

or $\sqrt{k+2} \geq \sqrt{k+1}$

$$\Rightarrow \sqrt{k+2} + \sqrt{k+1} \geq 2\sqrt{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

**c)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \ge 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right)$ puis calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

On a : $\forall k \in \mathbb{N};\ \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \frac{1}{2} U_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} U_k$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \leq \frac{1}{2} S_n$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+2} - 1 \leq \frac{1}{2} S_n$$



Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf | 62cbe1335301e_M....pdf | 6338df5499e79_Ex....pdf | 6338d98d78805_E....pdf | 6338d942b9c76_1....pdf | Tout afficher
20:20

Takiacademy | Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Chercher cours, examens ou exercices... | 1% | Votre solde 0 pts | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N};\ S_n \geq 2\left(\sqrt{n+2}-1\right)$

★ On a $\forall n \in \mathbb{N};\ S_n \geq 2\left(\sqrt{n+2}-1\right)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{n+2}-1\right) = +\infty$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

**Exercice 3 :** 20 min — 4 pts

Soit la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x\in]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

On donne ci-contre le tableau de variation de $f$

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\sqrt{2}-1$ |

Soit $U$ la suite définie sur IN par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0<U_n\leq 1$

★ Pour $n=0$ ; $0<U_0=1\leq 1$ (vraie)

★ Pour $n\in\mathbb{N}$ ; Supposons que $0<U_n\leq 1$

et montrons que $0<U_{n+1}\leq 1$

On a $0<U_n\leq 1$

et $f$ est croissante sur $[0,1]$

Donc $f(0)<f(U_n)\leq f(1)$

$\Rightarrow\ 0<U_{n+1}\leq \sqrt{2}-1 \leq 1$

★ Donc par récurrence ; $\forall n\in\mathbb{N};\ 0<U_n\leq 1$

2°) a) Montrer que pour tout $n\in$ IN on a : $U_{n+1}\leq \frac{1}{2}U_n$

★ $U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n = f(U_n)-\frac{1}{2}U_n$

$$= \frac{\sqrt{1+U_n^2}-1}{U_n}-\frac{1}{2}U_n$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{1+U_n^2}-1\right)-U_n^2}{2U_n}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+U_n^2}-\left(2+U_n^2\right)}{2U_n}\times\frac{2\sqrt{1+U_n^2}+\left(2+U_n^2\right)}{2\sqrt{1+U_n^2}+\left(2+U_n^2\right)}$$



www.takiacademy.com

Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf | 62cbe1335301e_M....pdf | 6338df5499e79_Ex....pdf | 6338d98d78805_E....pdf | 6338d942b9c76_1....pdf | Tout afficher
20:20

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ ;

★ On a $\forall n \in \mathbb{N}$ ; S

et $\lim\limits_{n \to +\infty}$

Ainsi

Exercice 3 :

Soit la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par

On donne ci-contre le tableau de variatio

Soit $U$ la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$

1°) Montrer que pour tout entier naturel

★ Pour $n = 0$ ;

★ Pour $n \in \mathbb{N}$ ;

et m

$$= \frac{\left(2\sqrt{1+U_n^2}\right)^2 - \left(2+U_n^2\right)^2}{2U_n\left(2\sqrt{1+U_n^2} + \left(2+U_n^2\right)\right)}$$

$$= \frac{4\left(1+U_n^2\right) - 4 - 4U_n^2 - U_n^4}{2U_n\left(2\sqrt{1+U_n^2} + \left(2+U_n^2\right)\right)}$$

$$= \frac{-U_n^4}{2U_n\left(2\sqrt{1+U_n^2} + \left(2+U_n^2\right)\right)} \leq 0$$

($-U_n^4 < 0$ ; $U_n > 0$ ; $2\sqrt{1+U_n^2} > 0$ ; $2+U_n^2 > 0$)

**Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$**

b) En déduire que $U$ est décroissante et que $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer la limite de la suit

★ On a $\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$\frac{1}{2} U_n \leq U_n$

et $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$ } Donc $U_{n+1}$

**Ainsi $U$ est décroissante**

$\in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

pour $n = 0$ $U_1 \leq \frac{1}{2} U_0$

pour $n = 1$ $U_2 \leq \frac{1}{2} U_1$

⋮

jusqu'à $n-1$ $U_n \leq \frac{1}{2} U_{n-1}$

Car $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$

Donc $U_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} U_0$ ($U_0 = 1$)

**$\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$**

$\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ Car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

**Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$**



Taki Academy www.takiacademy.com


Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

Takiacademy
Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Téléchargement ter... dev c++ - Recherch... Le groupe Slama in... Présentation20.ppt... Les bases de donné... Dell G15 GTX 1650... Une introduction à... exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1%
Votre solde
0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

Taki Academy

$$= \frac{\left(2\sqrt{1+U_n^2}\right)^2 - \left(2+U_n^2\right)^2}{2U_n\left(2\sqrt{1+U_n^2}+\left(2+U_n^2\right)\right)}$$

$$= \frac{4\left(1+U_n^2\right) - 4 - 4U_n^2 - U_n^4}{2U_n\left(2\sqrt{1+U_n^2}+\left(2+U_n^2\right)\right)}$$

$$= \frac{-U_n^4)<0}{2U_n^{>0}\left(2\sqrt{1+U_n^2}_{>0}+\left(2+U_n^2\right)_{>0}\right)} \leq 0$$

**Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$**

**b)** En déduire que $U$ est décroissante et que $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer la limite de la suite $U$.

★ On a $\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$\frac{1}{2} U_n \leq U_n$
et $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$ } Donc **$U_{n+1} \leq U_n$**

**Ainsi $U$ est décroissante**



Taki Academy

★ $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

★ Pour $n=0$ $U_1 \leq \frac{1}{2} U_0$

Pour $n=1$ $U_2 \leq \frac{1}{2} U_1$

⋮

jusqu'à $n-1$ $U_n \leq \frac{1}{2} U_{n-1}$

**Car $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$**

Donc $U_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} U_0$ ($=1$)

**Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$**

★ On a $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ Car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

**Ainsi $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$**

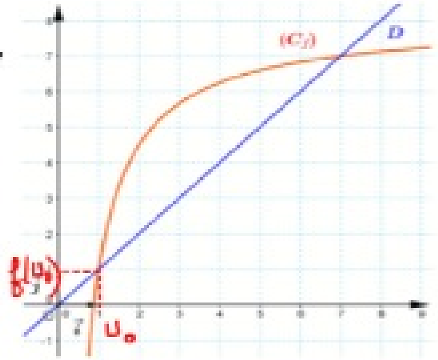


1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf 62cbe1335301e_M....pdf 6338df5499e79_Ex....pdf 6338d98d78805_E....pdf 6338d942b9c76_1....pdf Tout afficher
20:20

**Exercice 4 :** 15 min — 4 pts

On represente ci-contre la courbe $(C_f)$ d'une fonction $f$ et la droite $D: y = x$.

**1°)** Utiliser le graphique ci-dessous pour justifier la proposition suivante :
$f(x) \geq x$ pour $x \in [1,7]$.




★ Poun $x \in [1,7]$ la Combe $C_f$ est au dessus ou sur la droite $D: y = x$
donc $\forall x \in [1,7]$ ;
$f(x) \geq x$

**2°)** Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

Donner $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$. Que peut-on dire da la suite $(u_n)$ ?

★ $U_1 = f(U_0) = f(1) = 1$ ; $U_2 = f(U_1) = f(1) = 1$

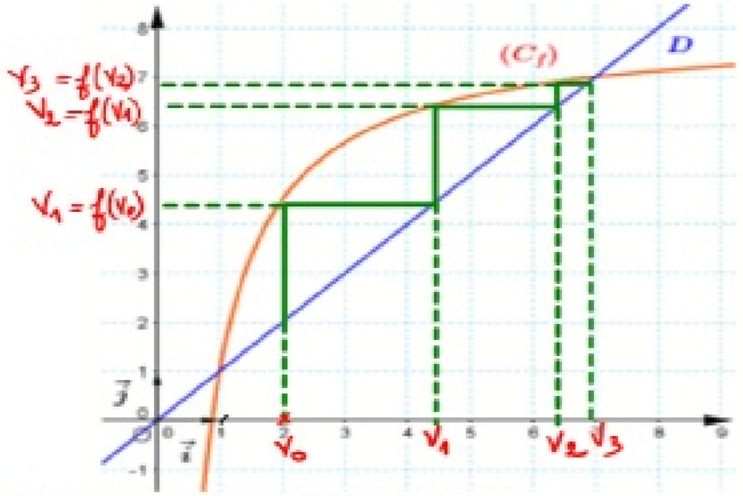
$U_3 = f(U_2) = f(1) = 1$ et $U_4 = f(U_3) = f(1) = 1$

**Ainsi la Suite $(U_n)$ est Constante.**



**3°)** Soit $(v_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

**a)** Placer sur l'axe des abscisses les points $v_1$, $v_2$ et $v_3$.




**b)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a : $1 \leq v_n \leq 7$.

★ Poun $n = 0$ ; $1 \leq V_0 = 2 \leq 7$ (vraie)

★ Poun $n \in \mathbb{N}$ ; Supposons que $1 \leq V_n \leq 7$
et montrons que $1 \leq V_{n+1} \leq 7$.

On a $1 \leq V_n \leq 7$ et $f$ est croissante sur $[1,7]$

donc $f(1) \leq f(V_n) \leq f(7)$

Takiacademy | Instagram • Direct
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/19-chapitre-1-suites-reelles/lessons/119843-correction-magazine-2-suites-reelles/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

$$d'où \quad 1 \leq V_{n+1} \leq 7$$

**Donc par récurrence ; $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $1 \leq V_n \leq 7$**

c) Montrer que $(v_n)$ est croissante.

$\forall x \in [1,7]$ ; $f(x) \geq x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $1 \leq V_n \leq 7$.

donc $f(V_n) \geq V_n$ d'où $V_{n+1} \geq V_n$.

**Ainsi la suite $(V_n)$ est croissante**

d) En déduire que $(v_n)$ est convergente et calculer sa limite.

$(V_n)$ est croissante et majorée par 7 donc elle est convergente. On pose $\lim V_n = \alpha$

avec $1 \leq \alpha \leq 7$ et $V_{n+1} = f(V_n)$ avec $f$ est continue sur $[1,7]$ en particulier en $\alpha$, donc $\alpha$ est la solution de l'équation $f(\alpha) = \alpha$.

donc $\alpha = 1$ ou $\alpha = 7$ et comme $(V_n)$ est croissante donc $\alpha = 7$



Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kebili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Correction-Magazine 1-(Suites réelles)
Magazine 2-(Suites réelles)
Correction-Magazine 2-(Suites réelles)
Magazine 3-(Suites réelles)
Correction Magazine 3-(Suites réelles)
Magazine 4-(Suites réelles)
Correction Magazine 4-(Suites réelles)
Magazine 5-(Suites réelles)
Correction Magazine 5-(Suites réelles)
Magazine 6-(Suites réelles)
Correction Magazine 6-(Suites réelles)

1 interactions
62cbe15a39e47_M....pdf | 62cbe1335301e_M....pdf | 6338df5499e79_Ex....pdf | 6338d98d78805_E....pdf | 6338d942b9c76_1....pdf | Tout afficher
20:20